ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β’

20 ΜΑΪΟΥ 2009

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία - Θεώρημα σελίδα 251 σχολ. βιβλίου.

Β. Θεωρία - Ορισμός σελίδα 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Λ

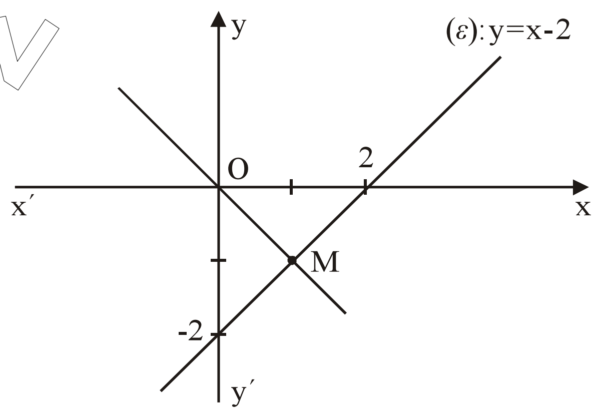
ΘΕΜΑ 2ο

Α. **α.** Έστω $z = x + yi$ και Μ(x,y) η εικόνα του. Τότε $x + yi = (2\lambda+1) + (2\lambda-1)i$.

Άρα $x = 2\lambda+1$ και $y = 2\lambda-1$. Έτσι όμως $y - x = -2 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία (ε) : $y = x - 2$.

β. Ο μιγαδικός z_o με το μικρότερο μέτρο έχει εικόνα το σημείο Μ για το οποίο είναι ΟΜ $\perp$ (ε).



Αφού ΟΜ $\perp$ (ε) $\Rightarrow \lambda_{OM} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -1$.

Άρα η εξίσωση της ΟΜ είναι : $y - y_0 = \lambda_{OM}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x$.

Οι συντεταγμένες του M (τομής των OM, ε) προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $y=-x$, $y=x-2$.

Επομένως M: $\begin{cases} y=-x \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ -x=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$.

Άρα M(1, -1) και $z_o=1-i$.

B. Έστω $w=x+yi$. Η εξίσωση $|w|^2+\overline{w}-12=z_o$

γράφεται $x^2+y^2+x-yi-12=1-i \Leftrightarrow x^2+y^2+x-12-yi=1-i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-12=1$ και $y=1 \Leftrightarrow x^2+x-12=0$ και $y=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (x=-4 ή x=3) και y=1.

Άρα $w=-4+i$ ή $w=3+i$.

ΘΕΜΑ 3ο

A. Ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x>-1$. Δηλαδή $\alpha^x - \ln(x+1) \geq 1$ για κάθε $x>-1$.

Όμως $f(0)=1$, οπότε $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x>-1$

Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x=0$ (ολικό άρα και τοπικό) ελάχιστο το $f(0)=1$.

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0)=0$.

Όμως $f'(x)=a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$.

Οπότε $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=e$.

B.

α. Για $\alpha=e$ είναι $f(x)=e^x-\ln(x+1)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ με

$$f''(x)=\left(e^x-\frac{1}{x+1}\right)'=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0 \text{ για κάθε } x\in(-1, +\infty).$$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού f κυρτή στο $(-1,\infty)$ είναι f' γνησίως αύξουσα στο $(-1,\infty)$.

Έτσι με $-1<x<0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$, ενώ με $x>0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $\dfrac{(f(\beta)-1)(x-2)+(f(\gamma)-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (f(\beta)-1)(x-2)+(f(\gamma)-1)(x-1)$, με $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική άρα και στο $[1, 2]$.

- $g(1) = -(f(\beta)-1) = 1 - f(\beta) = f(0) - f(\beta) < 0$ διότι f(0) ολικό ελάχιστο της f,
- $g(2) = f(\gamma) - 1 = f(\gamma) - f(0) > 0$, επίσης διότι f(0) ολικό ελάχιστο της f.

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f(\beta)-1)(x_0-2)+(f(\gamma)-1)(x_0-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(\beta)-1)(x_0-2)+(f(0)-1)(x_0-1)}{(x_0-1)(x_0-2)} = 0.$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μια ρίζα στο $(1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Η f συνεχής στο $[0, 2]$ άρα και η $tf(t)$ συνεχής στο $[0, 2]$.

Επομένως η $H(x)$ παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ άρα και συνεχής.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ αφού f συνεχής στο $[0, 2]$.

Άρα η G είναι συνεχής στο $(0, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της G στη θέση $x_0 = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)\,dt + 3\right) = 0 - 0 + 3 = 3$, διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)'}{(x)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{1} = 0 \cdot f(0) = 0.$$

(είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ αφού f συνεχής στο [0, 2].

Επίσης $G(0) = 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{1-t^2})(1+\sqrt{1-t^2})}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} =$

$= 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-1+t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} = 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} = 6\cdot\dfrac{1}{2} = 3$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = G(0) = 3$.

Άρα η G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Επομένως η G είναι συνεχής στο [0, 2].

β. Στο διάστημα (0, 2) είναι:

- H (x) παραγωγίσιμη αφού f(t) συνεχής με $H'(x) = xf(x)$
- x παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $(x)' = 1$.

Άρα $\dfrac{H(x)}{x}$ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων με

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)' = \frac{H'(x)\cdot x - H(x)(x)'}{x^2} = \frac{x\cdot f(x)\cdot x - \int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{dt}}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{dt}}{x^2}.$$

Επίσης στο ίδιο διάστημα, αφού f(t) συνεχής θα είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,dt$ με $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = f(x) - \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2},\ 0 < x < 2.$$

γ. Η συνάρτηση G(x) είναι συνεχής στο [0,2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2), με G(0)= 3 (από το β' ερώτημα).

Βρίσκουμε την τιμή της G(x) στη θέση x = 2:

$G(2) = \dfrac{H(2)}{2} - \int\limits_0^2 f(t)dt + 3$ (1).

Όμως από

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 tf(t)dt = 2\int_0^2 f(t)dt \Rightarrow H(2) = 2\int_0^2 f(t)dt\,.$$

Έτσι λόγω της (1) είναι

$$G(2) = \frac{2\int_0^2 f(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = 3 = G(0)\,.$$

Ισχύουν επομένως για τη συνάρτηση G οι προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0,2], άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $G'(a) = 0$.

Όμως από β' ερώτημα $G'(a) = -\dfrac{H(a)}{a^2}$.

Άρα είναι Η(α)= 0.

δ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, α] και παραγωγίσιμη στο (0, α). Άρα ισχύουν οι προυποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$:

$$G'(\xi) = \frac{G(a)-G(0)}{a-0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\dfrac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}t + 3 - 3}{\alpha} \underset{H(a)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$-\frac{\int_0^\xi t\,f(t)\mathrm{d}t}{\xi^2} = -\frac{\int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi t\,f(t)\mathrm{d}t = \xi^2\int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}t\,.$$