

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

17 ΜΑΪΟΥ 2010

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Ο ζητούμενος αριθμητικός μέσος είναι:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_v) - (v\bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

A2. Θεωρία σελίδα 86, 87, σχολικό βιβλίο.

A3. Θεωρία σελ. 140, σχολικό βιβλίο.

Βέβαιο ενδεχόμενο είναι το σύνολο Ω .

Αδύνατο ενδεχόμενο είναι το κενό σύνολο \emptyset .

A4.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Λ	Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για $x \neq 1$ είναι:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-1}{x-1} &= \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1} = \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}{x-1} = \\ &= \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \\ &= \frac{2(x^2-x)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = 1.$$

B2. Είναι

$$f'(x) = (2\sqrt{x^2-x+1}-1)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} (x^2-x+1)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ είναι:

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{0^2 - 0 + 1}} = -1.$$

B3. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

τότε είναι: $\varepsilon\phi\omega = f'(0) = -1$ Άρα $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν το πλάτος κάθε κλάσης είναι c , τότε οι δύο πρώτες κλάσεις είναι $[0, c)$ και $[c, 2c)$. Αφού το κέντρο της 2^{ης} κλάσης δίνεται ότι είναι 6 , προκύπτει $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$.

Γ2.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ X_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i
$[0, 4)$	2	20
$[4, 8)$	6	40
$[8, 12)$	10	45
$[12, 16)$	14	30
$[16, 20)$	18	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

$$\bar{x} = \frac{1}{160} \sum_{i=1}^5 v_i x_i = \frac{1}{160} (2 \cdot 20 + 6 \cdot 40 + 10 \cdot 45 + 14 \cdot 30 + 18 \cdot 25) = \frac{1600}{160} = 10.$$

$$s^2 = \frac{1}{160} \sum_{i=1}^5 v_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{160} [20(2-10)^2 + 40(6-10)^2 + 45(10-10)^2 + 30(14-10)^2 + 25(18-10)^2] =$$
$$= \frac{1}{160} \cdot 4000 = 25. \text{ Άρα } s=5.$$

Γ3. Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 50\% > 10\%$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

$$\Gamma 4. P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4} v_2 + v_3 + \frac{1}{2} v_4}{160} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 40 + 45 + \frac{1}{2} \cdot 30}{160} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}.$$

Παρατήρηση: Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης s στο Γ2 ερώτημα θα μπορούσε εναλλακτικά να χρησιμοποιηθεί και ο τύπος που δίνεται ως εξής:

$$s^2 = \frac{1}{160} \sum_{i=1}^5 x_i^2 v_i - \left(\frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{160} \right)^2 = \frac{1}{160} (20000) - (\bar{x})^2 = 125 - 100 = 25. \text{ Άρα } s=5.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x) = \frac{1}{x-P(A)} - (x-P(A)) = \frac{1-(x-P(A))^2}{x-P(A)} = \frac{(1-x+P(A)) \cdot (1+x-P(A))}{x-P(A)}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = P(A) + 1$ ή $x_2 = P(A) - 1$.

Είναι $x_1 > P(A)$ διότι $P(A) + 1 > P(A) \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει,

ενώ $x_2 < P(A)$ διότι $P(A) - 1 < P(A) \Leftrightarrow -1 < 0$, άρα η x_2 απορρίπτεται.

Έτσι ο πίνακας μεταβολών για την f είναι:

x	$P(A)$	$1+P(A)$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(P(A), 1 + P(A)]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1+P(A), +\infty)$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 1 + P(A)$ το

$$\begin{aligned} f(1+P(A)) &= \ln(1+P(A)-P(A)) - \frac{1}{2}(1+P(A)-P(A))^2 + P(B) = \\ &= \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + P(B) = P(B) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Δ2. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 5/3$, από Δ1 θα είναι:

$$1 + P(A) = 5/3 \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{3} - 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

Επίσης αφού $f(x_0) = 0$ είναι λόγω του Δ1 $f(1+P(A)) = 0 \Leftrightarrow P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$.

Δ3. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$.

Όμως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ άρα

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } P(A \cap B)' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Δ4. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

$$\text{Άρα } P[(A-B) \cup (B-A)] = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$