ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β’
14 ΜΑΪΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 152 σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου. Δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \varnothing$.

Α3. Θεωρία, σελ. 65 σχολικού βιβλίου. Η σχετική συχνότητα f_i μιας τιμής x_i ενός δείγματος, προκύπτει από το λόγο $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου v_i είναι η συχνότητα της τιμής x_i προς το μέγεθος v του δείγματος. Έτσι, αν πολλαπλασιαστεί επί 100 εκφράζει την ποσοστιαία εμφάνιση της τιμής x_i, σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος ν.

Α4. **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $N(A)$, $N(K)$, $N(M)$ τα πλήθη αντίστοιχα των άσπρων (A), κόκκινων (K) και μαύρων (M) σφαιρών. Επειδή $P(M) = \frac{1}{4}$, θα είναι: $\frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega) = 4 \bullet N(M)$.
Αφού $64 < N(\Omega) < 72$ έπεται $64 < 4N(M) < 72 \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18$. Αφού $N(M)$ είναι φυσικός αριθμός, προκύπτει $N(M) = 17$.
Άρα $N(\Omega) = 4 \bullet 17 = 68$.

Β2. Είναι $\mathrm{A} \cup \mathrm{K} \cup \mathrm{M} = \Omega$, άρα $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{K} \cup \mathrm{M}) = P(\Omega) = 1$ (1), με $A \cap M = \varnothing$, $A \cap K = \varnothing$, $M \cap K = \varnothing$, δηλαδή τα Α, Κ, Μ, είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.

Έτσι η (1) γράφεται $P(A) + P(K) + P(M) = 1$.
Προκύπτει έτσι $\frac{1}{4} + 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \;\; ή \;\; \lambda = \frac{1}{4}$.

- Για $\lambda = 1$ προκύπτει $P(A) = 4$, οπότε η τιμή $\lambda = 1$ απορρίπτεται διότι $0 \le P(A) \le 1$.
- Για $\lambda = \frac{1}{4}$ προκύπτει $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(\mathrm{K}) = \frac{1}{2}$, $P(\mathrm{M}) = \frac{1}{4}$. Άρα η τιμή $\lambda = \frac{1}{4}$ είναι η ζητούμενη.

Β3. $P(\mathrm{M})=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{N(M)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \mathrm{N(M)}=\frac{1}{4}\bullet \mathrm{N}(\Omega)=\frac{1}{4}\bullet 68=17.$

Επίσης, $P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \mathrm{N(A)}=\frac{1}{4}\bullet \mathrm{N}(\Omega)=\frac{1}{4}\bullet 68=17.$

$P^{'}(K)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow N(K)=\frac{1}{2}N(\Omega)=\frac{1}{2}\bullet 68=34.$

Β4. Έστω Α το ενδεχόμενο να επιλεγεί άσπρη σφαίρα και Μ το ενδεχόμενο να επιλεγεί μαύρη σφαίρα. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cup M$. Επειδή τα Α, Μ είναι ασυμβίβαστα, είναι: $P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$\overline{x}=\sum_{i=1}^{7}x_i f_i=8\cdot 0+10\cdot 0{,}1+12\cdot 0{,}2+14\cdot\frac{y_\Delta}{100}+16\cdot\frac{y_E}{100}+18\cdot 0{,}1+20\cdot 0$$

Επειδή είναι $\overline{x}=14{,}2$ και $y_\Delta = y_E$ έπεται

$14{,}2 = 1 + 2{,}4 + 30\frac{y_\Delta}{100} + 1{,}8 \Leftrightarrow 14{,}2 - 5{,}2 = 30\, y_\Delta \Leftrightarrow \frac{y_\Delta}{100} = \frac{9}{30}$.

Άρα: $y_\Delta = y_E = 30$

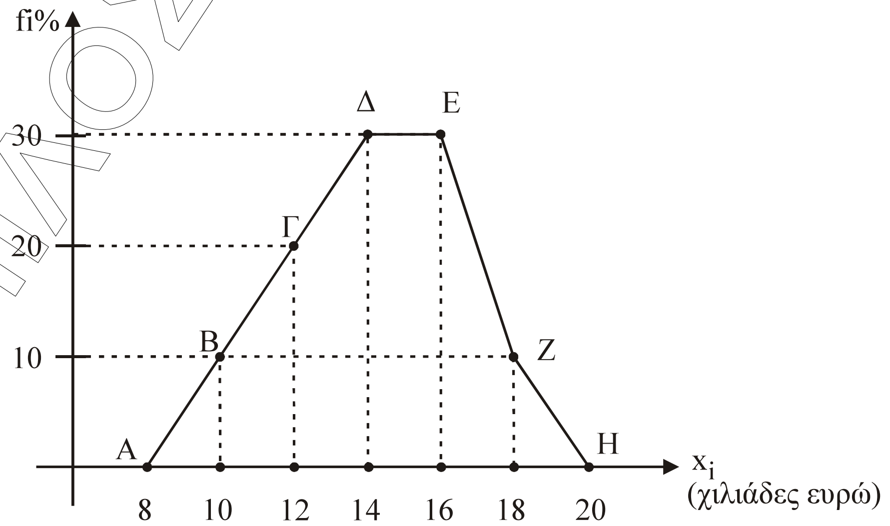
2ος τρόπος:

Επειδή $y_\Delta + y_E = 60$

και ΔΕ // x΄x είναι $y_\Delta = y_E$.

Έτσι προκύπτει $y_\Delta = y_E = 30$.

Γ2. Είναι:



Γ3. Είναι:

[-)	x_i	f_i %
9 - 11	10	10
11 - 13	12	20
13 - 15	14	30
15 - 17	16	30
17 - 19	18	10
Σύνολο		100

Γ4. Σύμφωνα με τον πίνακα του ερωτήματος Γ3, το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν το επιπλέον εφάπαξ ποσό είναι 40%.

Γ5. Είναι ν = 80, διότι το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το πλήθος ν των μετρήσεων.
Έτσι ο αριθμός των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό, που αναφέρεται στο ερώτημα Γ4, είναι: $80 \cdot 40\% = 32$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left[e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \right]' = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left[\frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{11}{10}x^2 + \frac{2}{5}x \right) \right]' =$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left[\frac{1}{3}\left(3x^3 - \frac{11}{5}x + \frac{2}{5}x \right) \right] = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} \right) = 0 \Leftrightarrow (\text{αφού } e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \neq 0 \ \ \forall x \in R)$$

$$x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2}{5}.$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		$1/3$		$2/5$		$+\infty$
f΄		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Επομένως η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$,
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$.

Δ2. Η f σύμφωνα με το Δ1 παρουσιάζει:

- τ. μέγιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{3}$
- τ. ελάχιστο στη θέση $x_2 = \frac{2}{5}$.

Είναι $A \subseteq B$ άρα $P(A) \leq P(B)$, οπότε $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Ακόμα, επειδή $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Οπότε:

- $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$.
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

Δ3. **α)**

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})} = e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3})} \overset{e^x \ 1-1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}) = \frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow 5x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}) = 3x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}) - 3x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5x}{2} + 3) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2, x_3 = 3.$$

β) Είναι:

- $\nu_1 = 2 \cdot x_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$
- $\nu_2 = 2 \cdot x_2 + 2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$
- $\nu_3 = 2 \cdot x_3 + 2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων:

x_i	v_i	xi vi
$x_1 = 0$	$v_1 = 1$	0
$x_2 = 2$	$v_2 = 5$	10
$x_3 = 3$	$v_3 = 7$	21
	$v = 13$	

Άρα $\bar{x} = \dfrac{0+10+21}{13} = \dfrac{31}{13}$.