

Θέμα Α:

A1. Σελίδα 31 σχολικό βιβλίο

A2. Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

A3. Εάν σε κάθε τιμή x_1, x_2, \dots, x_n δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) w_1, w_2, \dots, w_n , τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

A4.

- i) Λ
- ii) Σ
- iii) Λ
- iv) Λ
- v) Σ

Θέμα Β:

B1. Έχουμε: $(3x-1) \cdot (8x^2 - 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0$ ή $8x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } \Delta = 36 - 32 = 4 \text{ Άρα } x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{16} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ και $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Άρα $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

B2. Έχουμε: $P(A' - B') = P(A') - P(A' \cap B') = 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$$\text{Και } P(\Delta) = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

B3. Έχουμε:

$$P(E) = P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

B4. Λύνουμε την εξίσωση: $9x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\Delta = 9 + 72 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{18} \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

Εφόσον $0 \notin R(G) \notin 1$ απορρίπτεται η ρίζα $x_1 = -\frac{1}{3}$

$$\text{Οπότε } R(G) = \frac{2}{3}$$

Υπολογίζουμε και το $P(B)$ από τον προσθετικό νόμο και έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$$

Έστω τα ενδεχόμενα B, Γ ότι είναι ασυμβίβαστα, άρα θα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος, δηλαδή:

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα τα ενδεχόμενα B, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα

Θέμα 3^ο :

Γ1. Οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 10 ανήκουν στην πρώτη κλάση. Άρα $f_1\% = 10$.

Οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 ανήκουν στην πέμπτη κλάση .

$$\text{Άρα } f_5\% = 30.$$

Έστω α_3 η γωνία της τρίτης κλάσης στο κυκλικό διάγραμμα. Ισχύει : $\frac{\nu_3}{\nu} = \frac{\alpha_3}{360} \rightarrow f_3 = \frac{108}{360}$

$$\text{ή } f_3 = 0.3 \text{ ή } f_3\% = 0.3 \cdot 100 = 30\%.$$

Για τις σχετικές επί τοις εκατό συχνότητες ισχύει ότι : $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$

$$10 + f_2\% + 30 + f_4\% + 30 = 100$$

$$f_2\% + f_4\% = 30 \text{ (σχέση I)}$$

Επίσης $\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5$

$$100 \cdot \bar{x} = x_1 \cdot f_1 \cdot 100 + x_2 \cdot f_2 \cdot 100 + x_3 \cdot f_3 \cdot 100 + x_4 \cdot f_4 \cdot 100 + x_5 \cdot f_5 \cdot 100$$

$$100 \cdot 14 = 9 \cdot 10 + 11 \cdot f_2\% + 13 \cdot 30 + 15 \cdot f_4\% + 17 \cdot 30$$

$$11f_2\% + 15f_4\% = 410 \text{ (σχέση II)}$$

Από σχέση I και II προκύπτει ότι : $f_2\% = 10$ και $f_4\% = 20$.

$$\Gamma 2. s^2 = \frac{(x_1-14)^2 v_1 + \dots + (x_5-14)^2 v_5}{v} = 25 \cdot f_1 + 9 \cdot f_2 + \dots + 9 \cdot f_5 = 2.5 + 0.9 + 0.3 + 0.2 + 2.7 = 6.6$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6.6} = 2.57$. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2.57}{14} = 0.18$ ή $18\% > 10\%$. Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

$$\Gamma 3. \bar{x} = \frac{\sum_1^4 x_i v_i + x_5 v_5}{v}$$

$$14 = \frac{1780}{v} + x_5 \cdot f_5$$

$$\frac{1780}{v} = 14 - 5.1$$

$$\frac{1780}{v} = 8.9 \text{ ή } v = \frac{1780}{8.9} = 200 \text{ το μέγεθος του δείγματος.}$$

Γ4.

Μέση τιμή: $\bar{a} = \frac{a_1 + \dots + a_5}{5}$ ή $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 5\bar{a}$. (σχέση 1)

$$\bar{\beta} = \frac{\beta_1 + \dots + \beta_5}{5} = \frac{\alpha_1 - \bar{a} + \dots + \alpha_5 - \bar{a}}{5} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 5\bar{a}}{5} = 0 \text{ (από σχέση 1)}$$

νέο φροντιστήριο

Διακύμανση και Τυπική απόκλιση :

$$s_B^2 = \frac{(\beta_1-0)^2 + \dots + (\beta_5-0)^2}{5} = \frac{\beta_1^2 + \dots + \beta_5^2}{5} = \frac{(\alpha_1 - \bar{\alpha})^2 + \dots + (\alpha_5 - \bar{\alpha})^2}{5 \cdot s_a^2} = \frac{s_a^2}{s_a^2} = 1$$

$$\text{Άρα } s_B = \sqrt{s_B^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Θέμα Δ :

Δ1. Φέρνοντας OZ κάθετη στην AB δημιουργείται ορθογώνιο τρίγωνο OZB και με χρήση του Πυθαγορείου

$$\text{Θεωρήματος έχουμε } OB^2 = ZB^2 + OZ^2 \Rightarrow 25 = \frac{x^2}{4} + OZ^2 \Rightarrow OZ^2 = \frac{100-x^2}{4} \Rightarrow OZ = \frac{\sqrt{100-x^2}}{2}$$

$$\text{Και επειδή } OZ = \frac{A\Delta}{2} \text{ συμπεραίνουμε ότι } A\Delta = \sqrt{100-x^2}.$$

$$\text{Οπότε } E(x) = f(x) = AB \cdot A\Delta = x \sqrt{100-x^2}$$

Δ2.

$$f(x) = x\sqrt{100-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{100-x^2} + x \frac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}} = \sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{100-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} \Rightarrow \sqrt{100-x^2}^2 = x^2 \Rightarrow 100-x^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} \Rightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$$

$$\text{Και επειδή } x > 0, x = 5\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} > 0 \Rightarrow \sqrt{100-x^2} > \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} \Rightarrow \sqrt{100-x^2}^2 > x^2 \Rightarrow 100-x^2 > x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 < 100 \Rightarrow x^2 < 50 \Rightarrow x < \sqrt{50} \Rightarrow x < 5\sqrt{2}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
f'		+	-
f		\nearrow	\searrow

Άρα το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$ όπου το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο με πλευρές μήκους $5\sqrt{2}$.



Δ3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{98x} = \frac{f'(1)}{98} = \frac{\frac{98}{\sqrt{99}}}{98} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4.

$$0 < P(A-B) < 1 \Leftrightarrow 0 < P^2(A-B) < 1 \stackrel{(-1)}{\Leftrightarrow} -1 < -P^2(A-B) < 0 \stackrel{+100}{\Leftrightarrow}$$

$$99 < 100 - P^2(A-B) < 100 \Leftrightarrow \sqrt{99} < \sqrt{100 - P^2(A-B)} < \sqrt{100} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Όμως $0 < P(A) < 1$ Άρα $0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < \frac{1}{\sqrt{99}} < 5\sqrt{2}$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} < \frac{1}{\sqrt{99}} < 5\sqrt{2}$

Όμως στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα έχουμε:

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P(A)^2}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P(A-B)^2}}\right) \Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P(A)^2}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P(A-B)^2}} \Leftrightarrow$$

$$P(A-B)\sqrt{100 - P(A-B)^2} \leq P(A)\sqrt{100 - P(A)^2} \Leftrightarrow f(P(A-B)) \leq f(P(A)) \Leftrightarrow P(A-B) \leq P(A)$$

Όμως $(A-B) \subseteq A$ Άρα $P(A-B) \leq P(A)$

Επομένως ισχύει $f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$.